1084. イデヤルノ一性質

深宮 政範（阪大）

R ヲ unit ヲ有シ, complex number ヲ係數トスル abstract ring トスル. R ノ commutativity ハ假定シナイ。

部分集合 $I\subset R$ ガ, $x, y\in I \to x+y\in I$, $x\in I$, $y, z\in R \to y\times z\in R$ ナルトキ R ノ ideal ト云フ。
ideal $I\neq(0)$, R ナラバ proper ideal ト云フ。

R ガ proper ideal ヲ含マナイトキ, R ヲ simple ト云フ。

proper ideal I ヲ含ム proper ideal ガナイ（I 以外ニ）時 I ヲ maximal ideal ト云フ. 良ク知ラレタ方法ニヨッテ任意ノ proper ideal I ヲ含ム maximal ideal M ガ存在スルコトガ証明デキル。

M ガ maximal ideal ナラバ Rest-class-ring R/M ハ simple デアル。

R ノ凡エル maximal ideal M ノ集合ヲ $\mathfrak{M}$ デ表ハス。Stone ニ従ッテ $\mathfrak{M}$ ノ位相ヲ定義スル. 任意ノ sub set $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{M}$ ニ対シテ凡エル $M\supset\prod_{\mathfrak{a}}M$ ノ集合ヲ $\bar{\mathfrak{a}}$ トスレバ

(i) $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}=\bar{\mathfrak{a}}$, (ii) $\overline{\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}}=\bar{\mathfrak{a}}\cup\bar{\mathfrak{b}}$

(iii) $\mathfrak{a}\subset\bar{\mathfrak{a}}$, (iv) $\overline{(M)}=M$

ガ成立ツ. 従ッテ $\mathfrak{M}$ ハ T_1-space デアル。

(i), (iii), (iv) ハ明ラカダカラ (ii) ヲ証明スル. 定義カラ $\bar{\mathfrak{a}}\cup\bar{\mathfrak{b}}\subset\overline{\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}}$ ハ明ラカ. 逆ニ $\overline{\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}}\subset\bar{\mathfrak{a}}\cup\bar{\mathfrak{b}}$ ヲ証明スレバ良イ。

假リニ $M_0\in\overline{\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}}$, 且ツ $M_0\notin\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}$ ナル M_0 ガアッタトスレバ

$$z\notin M_0,\quad z\in\prod_{\mathfrak{a}}M;$$

$$z' \neq M_0, \quad z' \in \prod_{\mathfrak{t}} M$$

ナル $z,\ z' \in R$ ガ存在スル. 依ッテ

$$R \cdot z' \cdot R \in \prod_{\mathfrak{t}} M, \quad z(Rz'R) \subset \prod_{\mathfrak{n}} M \cdot \prod_{\mathfrak{t}} M \subset M_0$$

及ビ $z' \overline{\in} M_0$ カラ

$$M_0 + R \cdot z' \cdot R = R$$

従ッテ

$$zR = zM_0 + z(Rz'R) \subset M_0 + M_0 = M_0$$

R ハ unit ヲ有ツ故 $z \in M_0$, 假定ニ矛盾スル。

$\mathfrak{M}$ ハ bicompact T_1 空間デアル。$\{F_\alpha\}$ ヲ任意箇ノ閉集合 $F_\alpha < \mathfrak{M}$ ノ集合トシ, 任意ノ有限箇 $F_{\alpha_1}, \cdots\cdots, F_{\alpha_n}$ ニ対シテ, intersection $F_{\alpha_1} \frown F_{\alpha_2} \frown \cdots\cdots \frown F_{\alpha_n} \neq$ leer ト假定スル。各 F_α ニ對シテ $\prod_{N \in F_\alpha} N = I_\alpha$ トシ, 凡エル I_α ノ生成スル ideal (即チ凡エル I_α カラノ元ノ凡エル有限和ノ作ル) ヲ I トスル。I ガ maximal ideal M_0 ニ含マレレバ, $M_0 \supset I \supset I_\alpha = \prod_{F_\alpha} N$, 即チ $M_0 \in F_\alpha$, 従ッテ $\{F_\alpha\}$ 全体ニ共通点ガアルコトガ云ヘル。$I = R$ デアッタトスレバ定義カラ有限箇ノ X_i, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ガ存在シテ, $X_i \in I_{\alpha_i}$,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1,$$ 一方 $M \in F_{\alpha_i}$ ナラバ $M \supset I_{\alpha_i} = \prod_{F_{\alpha_i}} M$ ナル故,

$M \in \prod_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$ カラ $M \supset \sum_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} \ni 1$, 従ッテ $\prod_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} =$ *leer* デナケネバナラナイ, 之レハ假定シタ有限交叉性ニ矛盾スル。

任意ノ $x \in R$ ニ対シテ $F = \{M / x(M) = 0\}$ ハ $\mathfrak{M}$ ノ閉集合デ, F ノ補集合 $U = \{M / x(M) \neq 0\}$ ナル集合全体ハ $\mathfrak{M}$ ノ *definierendes System der offene Menge* ヲ作ル。

凡ユル *maximal ideal* ノ共通部分ガ *ideal* (0) ダケノ場合 R ヲ *semi-simple* ト云フ。

$\bar{R}$ ガ *semi-simple* ナルトキ, R ハ $\mathfrak{M}$ ノ上ノ函数(一般ニ各坐標ノ上ノ値ハ別々ナ *simple ring* ノ元デアル) ノ *ring* ヘ *isomorphic* ニ表現出来ル。

R ノ *automorphism* $x \to x^*$ ガアッテ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^* \in M \text{ ナラバ } x_i \in M$$

ナルコトガ凡ユル $M \in \mathfrak{M}$ ニ対シテ成立ツ。

時 R ヲ *Hermitian* ト云フ。

定理. R ガ *semi-simple*, *hermitian* ナ *ring* トスル

I ヲ R ノ *ideal*, I ヲ含ム凡ユル *maximal ideal* ノ集合ヲ $\mathfrak{n}$ $(\subset \mathfrak{M})$, $\mathfrak{n}$ ヲ含ム任意ノ *open set* ヲ O トスレバ

$$\prod_{\mathfrak{n}} M \supset I \supset \prod_{O} M$$

証明. $\mathfrak{N}$ハ開集合デアル。

$\prod_{\mathfrak{N}} \supset I$ ハ明ラカ. $I \supset \prod_{O} M$ ヲ証明スル。

$z \in \prod_{O} M$ トスレバ $z(M)=0$ for $M \in O$.

$\mathfrak{M}-O$ ハ閉集合ニテ$\mathfrak{N}$デアル. 従ッテ任意ノ$M \in \mathfrak{N}$ニ對シテ

$X_M(M) \neq 0$, $X_M(N)=0$ for all $N \in \mathfrak{M}-O$

ナル$X_M \in R$ガ存在スル. 集合$[N / X_M(N) \neq 0]$ハ明ラカニ$\subset O$.

$\mathfrak{N}$ハ closed ダカラ, 有限箇ノ $M_1, \cdots\cdots, M_n \in \mathfrak{N}$ ガ存在シテ

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} X_{M_i} X^*_{M_i},$$

ガ $y_1(N) \neq 0$ for all $N \in O_1$ $= [O$ニ含マレ, $\mathfrak{N}$ヲ含ムアル open set$]$

$= 0$ for all $N \in \mathfrak{M}-O$

ヲ満足スル.

任意ノ $M \in \mathfrak{N}$ ニ對シテ

$X_M(M) \neq 0$, $X_M(N)=0$ $N \in \mathfrak{N}$

ナル $X_M \in I$ ガ存在スル. $\mathfrak{M}-O_1$ ヲMヲシテ動カセテ, $\mathfrak{M}-O_1$ ガ closed set ナルコトカラ, 再ビ適當ニ $M_1, \cdots\cdots, M_m \in \mathfrak{M}-O_1$ ヲトレバ

$$y_2 = \sum_{i=1}^{m} X_{M_i} X^*_{M_i}, \in I$$

ガ $y_2(N) \neq 0$ for all $N \in \mathfrak{m} - O$,

ナルヤウニ出来ル。依ッテ $v(y_1 + y_2) v' = 1$ ナル $v, v' \in R$

ガ存在シ，又 $(y_1 + y_2)(M) = y_2(M)$ for $M \in \mathfrak{m} - O$,

$z(M) = 0$ for $M \in O$, $z = z v y_1 v' + z v y_2 v'$

$= z v y_2 v' \in I$ ナルコトガ表現ノ isomorphic ナコ

トカラ得ラレル。（終リ）